

A 3D-s domborzati modellek mintavételi tulajdonságainak néhány kérdése

Elek István

2004

Bevezetés

A digitális domborzati modellekkel operáló szoftverek eőszszeretettel használnak szabályos rácsban tárolt magassági adatokat. Ez a forma egyszerű, úgy a megjelenítés, mint a számolások számára kézenfekvő. Ezt a modellt vizsgáljuk meg a jelfeldolgozásban jól ismert mintavételi tétel szempontjából.

Először vázlatosan áttekintjük a mintavételezés folyamatát, majd ismertetünk néhány következtetést.

1.1. Mintavételezés

A szaktudományokban alapvető jelentőségű az adatnyerés folyamata, amely a technika mai színvonalán digitális adatnyerést vagy mintavételezést jelent. Mintavételezéskor gyakran analóg jelekből állítunk elő digitális adatokat, máskor eleve diszkrét, esetleg nem szabályosan elhelyezkedő mintavételi pontokban történik az adatnyerés. A mintavételezés folyamatának megértése nagy jelentőségű, mivel az adatokból levonható következtetések függhetnek a mintavételezés módjától.

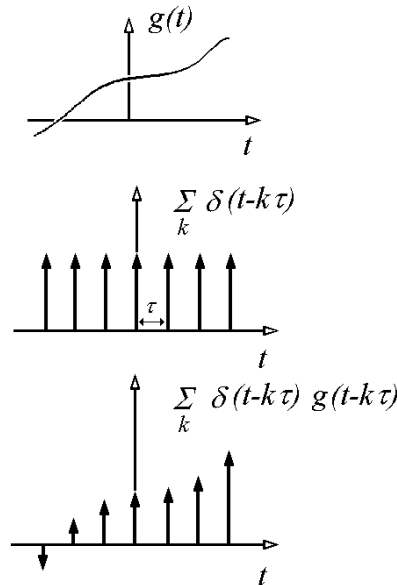
Képzeld el a mintavételezést, mint egy kétállású kapcsolóval szabályozott mérő berendezést, amely bekapcsolt állapotban rögzíti a mérendő paramétert, kikapcsolt állapotban pedig mit sem tud a környezetéről. Más szavakkal azt is mondhatjuk, hogy két mintavételi (idő)pont között bármi történik is, arról nem fogunk tudomást szerezni, mivel mérő berendezésünk ilyenkor kikapcsolt állapotban van. Belátható, hogy ez a fajta hiányosság csökkenthető, ha sűrítjük a mintavétel gyakoriságát, vagyis csökkentjük az érzékelés nélkül töltött üzemmód részarányát a működő állapothoz képest. Nevezzük mintavételi távolságnak két érzékelés közötti intervallumot, amely, ha idősorokról van szó, akkor idő dimenziójú, de lehet távolság dimenziójú is, ha két mintavételi pont között térbeli távolságról van szó.

A következőkben vázlatosan áttekintjük a mintavételezés legfontosabb törvényszerűségeit, egyenletes mintavételezést feltételező esetekben. Az egyszerűség kedvéért idősorokkal, vagyis egy dimenziós problémákkal foglalkozunk, amik teljes mértékben általánosíthatók több dimenziós esetekre is, mint amilyen a háromdimenziós terepmodell.

1.1.1. Mintavételi tétel

Legyen τ az úgynevezett mintavételi távolság. Ábrázoljuk a $g(t)$ időfüggvényt és a mintavételezés eszközét, a Dirac impulzusok sorozatát, majd a mintavételezés eredményét, a digitalizált időfüggvényt (1.1. ábra). A mintavételezés tehát nem más, mint a $g(t)$ időfüggvény és a Dirac impulzus sorozat szorzata:

$$g(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k\tau) \delta(t - k\tau)$$



1.1. ábra. A mintavételezés eredménye egy olyan impulzus sorozat, melynek tagjai az eredeti függvénynek a mintavételi helyen felvett értékei.

Vizsgáljuk meg az analóg függvény és a mintavételezett spektrumát. Jelöljük $G(f)$ -fel az eredeti, és $G_d(f)$ -fel a digitalizált függvény spektrumát. A Dirac- δ Fourier-transzformáltjának és a konvolúció tételek felhasználásával felírható a mintavételezett függvény spektruma:

$$G_d(f) = G(f) * \frac{1}{\tau} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - \frac{k}{\tau})$$

vagyis

$$G_d(f) = \frac{1}{\tau} \sum_{k=-\infty}^{\infty} G(f - \frac{k}{\tau})$$

Értelmezzük a kapott eredményt. A kifejezés jobb oldala szerint a digitalizált jel spektruma periodikus, ami azért érdekes, mert aperiodikus függvények (vagy más néven tranziens függvények) spektruma nem periodikus függvény, vagyis a mintavételezés az eredetileg nem periodikus spektrumot periodikussá teszi. A

spektrumnak a $-1/2\tau$ és $1/2\tau$ eső részét a spektrum fő részének, az $f_N = 1/2\tau$ értéket Nyquist-frekvenciának nevezzük. A spektrum többi részén a f_N rész f_N periódussal ismétlődik. A fenti formulákból világosan kiolvasható, hogy az analóg és a digitalizált függvény spektruma jelentősen eltérhet egymástól, ha az analóg függvény tetszőleges frekvenciájú jeleket is tartalmazhat. Ha azonban létezik egy olyan felső határfrekvencia (f_f), amelynél nagyobb frekvenciájú jel nem fordulhat elő, akkor belátható, hogy a felső határfrekvencia és a τ mintavételi távolsággal még átvihető legnagyobb frekvencia között igaz a következő összefüggés:

$$f_f \leq f_N$$

vagyis

$$\tau \leq \frac{1}{2f_f}$$

Ez az összefüggés a mintavételi tétel. Jelentése, hogy mintavételezéskor a még átvihető legnagyobb frekvenciához, f_f -hez úgy kell megválasztanunk a mintavételi távolságot (τ), hogy teljesüljön a mintavételi tétel. Ha ennél kisebbre választjuk a mintavételi távolságot, akkor feleslegesen sűrűn mintavételezett adatrendszert kapunk, ha pedig ennél nagyobbra, akkor nem fog teljesülni az f_f felső határfrekvencia szerinti jelátvitel. Túlzottan ritka mintavételezéssel tehát felülvágást fogunk végrehajtani az adatrendszer spektrumán.

1.1.2. Az analóg jel visszaállítása

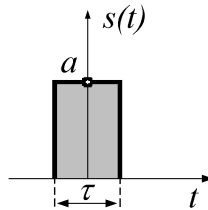
Láthattuk, hogy bizonyos esetekben a digitalizálás (mintavételezés) adatvesztéssel járhat. Tekintsük át, hogy mikor nem veszünk adatot. A megfelelően mintavételezett digitális adatrendszerből az eredeti analóg jel pontosan visszaállítható. (Akkor mondjuk megfelelően mintavételezettnek az adatrendszert, ha teljesült a mintavételi tétel.)

Ha pontosan vissza kívánjuk állítani az eredeti analóg jelet a mintavételezett jel spektrumából ($G_d(f)$), akkor el kell tüntetnünk a spektrum fő részein kívüli részeit, mivel a mintavétel periódikussá tette a transziens függvény spektrumát, vagyis meg kell szoroznunk $G_d(f)$ -t egy olyan négyszög függvénnyel, amelynek magassága τ , szélessége $1/\tau$. Így egyszerűen kiküszöböljük a mintavételezéssel belevitt periodicitást, vagyis visszkapjuk az analóg jel spektrumát. Az ismertett gondolatmenet akkor adja vissza a jelet az idő tartományban, ha visszkapott spektrumot inverz Fourier-transzformáljuk.

A továbbiakhoz vizsgáljuk meg, hogy mi a négyszög függvény (1.2. ábra) Fourier-transzformáltja. Definiáljuk a négyszög függvényt a következőképpen:

$$s(t) = a, \quad \text{ha } |t| < \tau$$

$$= 0, \quad \text{egyébként.}$$

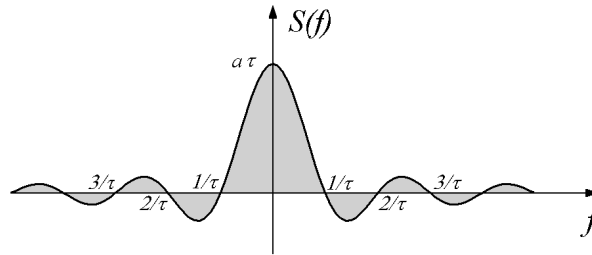


1.2. ábra. A négyzetimpulzus

Végezzük el a függvény Fourier-transzformációját:

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-2\pi i f t} dt = a \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-2\pi i f t} dt = a\tau \frac{\sin \pi f \tau}{\pi f \tau}$$

Ezt a függvényt szinuszkardinalisz függvénynek is nevezik és *sinc*-vel jelölik (1.3. ábra).



1.3. ábra. A négyzetimpulzus Fourier-transzformáltja a *sinc* függvény

Így tehát ismerve a konvolúció tulajdonságait és a négyzetfüggvény (inverz) Fourier-transzformáltját, belátható, hogy a τ magasságú és $1/\tau$ szélességű négyzetfüggvénnyel való szorzás a frekvencia tartományban a *sinc* függvénnyel való konvolúciót jelent az időtartományban.

Jelölje $s(t)$ a négyzetfüggvényt. Ekkor a spektrumismétlődést megszüntető levágásra írható, hogy

$$G_d(f)\tau \cdot s(f\tau) = G(f)$$

Így elértük, hogy az analóg és a digitális adatrendszer spektruma azonos lesz, amely egyben azt is jelenti, hogy a digitális adatrendszerből adatvesztés nélkül visszaállítható az analóg adatrendszer. A mintavételezés azonban az időtartományban történik, ezért meg kell értenünk azt is, hogy az amúgy meglehetősen egyszerű művelet a frekvencia tartományban - mármint a spektrum f részén kívüli tartomány levágása - mit jelent az időtartományban. A digitalizált adatrendszer levágott spektrumának inverz Fourier-transzformációjával

$$\mathcal{F}^{-1}\{G_d(f)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k\tau)\delta(t - k\tau)$$

valamint annak figyelembe vételével, hogy

$$\mathcal{F}^{-1}\{\tau \cdot s(f\tau)\} = \text{sinc}(t/\tau - k)$$

Ezek alapján a jel visszaállítása az időtartományban a következő módon lehetséges:

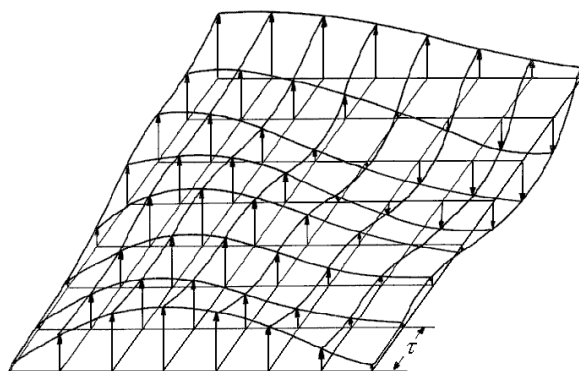
$$\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k\tau)\delta(t - k\tau) \right) \text{sinc}(t/\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k\tau)\text{sinc}(t/\tau - k)$$

vagyis a visszaállított értékek a minták és a *sinc* függvény megfelelő argumentummal vett értékeinek szorzata. Ez azt jelenti, hogy az így visszkapott értékek pontosan azonosak az egyes minták értékeivel, valamint az analóg függvény tetszőleges helyén felvett értékek előállíthatók a mintáknak és a megfelelő argumentummal megadott *sinc* függvényértékek szorzatának összegzésével. Természetesen csak akkor igazak ezek a megállapítások, ha teljesült a mintavételi tétel. Túl nagyra választott mintavételi távolság esetén az analóg jel spektruma nem állítható vissza pontosan, mivel a túl ritka mintavétel felülvágást hajtott végre a spektrumban.

1.2. Domborzati modellek

A domborzati modellek megalkotásának egyik fontos állomása, hogy ismerjük szabályos rácspontokban a felszíni magasság értékeket. Ezen adatnyerési technikák ismertetését mellőznénk, ugyanakkor fontosnak tartjuk kiemelni a mintavételi tétel ide vonatkozó következményeit. A magasság értékek egy a felszínt leíró függvénynek egy τ rácsállandójú Dirac impulzus sorozattal való szorzásával kaphatók meg (1.4. ábra)

Ebből kézenfekvően adódik, hogy a τ hosszúságú mintavételezéssel nem tudunk kimutatni 2τ -nál kisebb méretű terepi képződményeket.



1.4. ábra. A τ rácsállandójú Dirac- δ sorozattal mintavételezett felszín

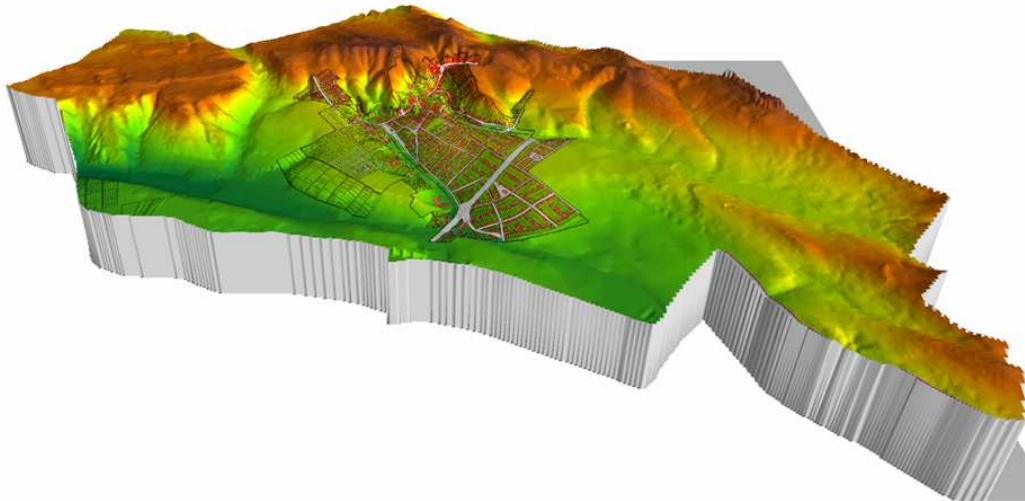
A 1.5. ábrán egy valóságos domborzati modellt láthatunk, amelynek felbontóképessége kb. 5m, amivel a mintavételi tétel miatt 10 m-nél kisebb horizontális kiterjedésű felszíni egyenetlenség nem mutatható ki. Ha a modellt árvízvédelmi célra kívánjuk használni, akkor belátható, hogy egy a fenti pontosságnak eleget tevő magassági modell két mintavételi pontja között mit sem tudunk a terep alakulásáról. Egy árvízvédelmi töltésen, két egymástól 10 méterre lévő mintavételi pont között nem fogjuk tudni megmondani, hogy ott milyen magassági értékek vannak, márpedig ez nem engedhető meg. Erre a célra sokkal sűrűbben mintavételezett magassági modell kell.

Általánosságban kimondható, hogy nincsenek univerzálisan, minden célra alkalmas domborzati modellek. A pontossággal szembeni elvárások eltérő mivolta egyben különböző mintavételezési kritériumokat is jelent. Ezért fordulhat elő, hogy a telekommunikáció számára megfelelően pontos domborzati modell az árvízvédelem számára nem az.

1.3. Átmintavételezés, befogadóképesség, generalizálás

Előfordulhat, hogy valamely okból egy létező adatrendszert egy másik mintavételi távolságra áttérve szeretnénk átalakítani. Ha csökkentjük a mintavételi távolságot, akkor sűrítést, ha növeljük, akkor ritkítást hajtunk végre. A sűrítés – amit gyakran interpolációnak is nevezünk – nem változtatja meg az adatrendszer spektrumát, de a ritkítás igen.

Egy-egy térkép maximális információmennyiségét a térkép befogadóképessé-



1.5. ábra. Egy domborzati modell perspektivikus megjelenése. A település digitális térképe rá van feszítve a felszínre.

gének nevezzük. A befogadóképesség korlátozottsága miatt a térképen nem lehet a teljes valóságot bemutatni. A méretarány csökkenésével (1:10.000, 1:1.000.000) a legjellemzőbb részletek kiemelésére szükség lesz – amelyet generalizálásnak nevezünk – mivel a teljes részletességű ábrázolás vagy nem lehetséges, vagy ha lehetséges is, de olvashatatlan, áttekinthetetlen térképet eredményez.

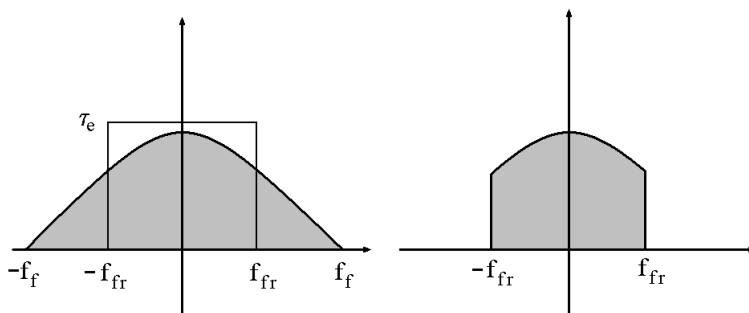
A következőkben egy ritkításon alapuló generalizálási eljárást fogunk bemutatni. Előtte azonban vizsgáljuk meg, hogy milyen hatása lesz az adatrendszerre a ritkítésnek. Legyen τ_e az eredeti és τ_r a ritkített adatrendszer mintavételi távolságai. Mint tudjuk az eredeti adatrendszerben átvihető legnagyobb frekvencia (f_{fe}) és a mintavételi távolság (τ_e) között fennáll a következő összefüggés:

$$\tau_e \leq \frac{1}{2f_{fe}}$$

A ritkítés utáni felső határfrekvenciára (f_{fr}) is igaz, hogy

$$\tau_r \leq \frac{1}{2f_{fr}}$$

A ritkítés utáni spektrumból az f_{fe} és az f_{fr} közötti frekvenciasáv hiányozni fog, mégpedig az 1.6. ábrán látható módon:



1.6. ábra. Az ábra bal oldali részén a ritkítás előtti, a jobb oldali részén a ritkítás utáni spektrumot láthatjuk. f_{fe} az eredeti adatrendszer felső határfrekvenciája, f_{fr} a ritkítás utánié. A levágást egy $2f_{fr}$ (azaz $1/\tau_r$) hosszúságú és τ_e magasságú négyszögfüggvénnyel végeztük.

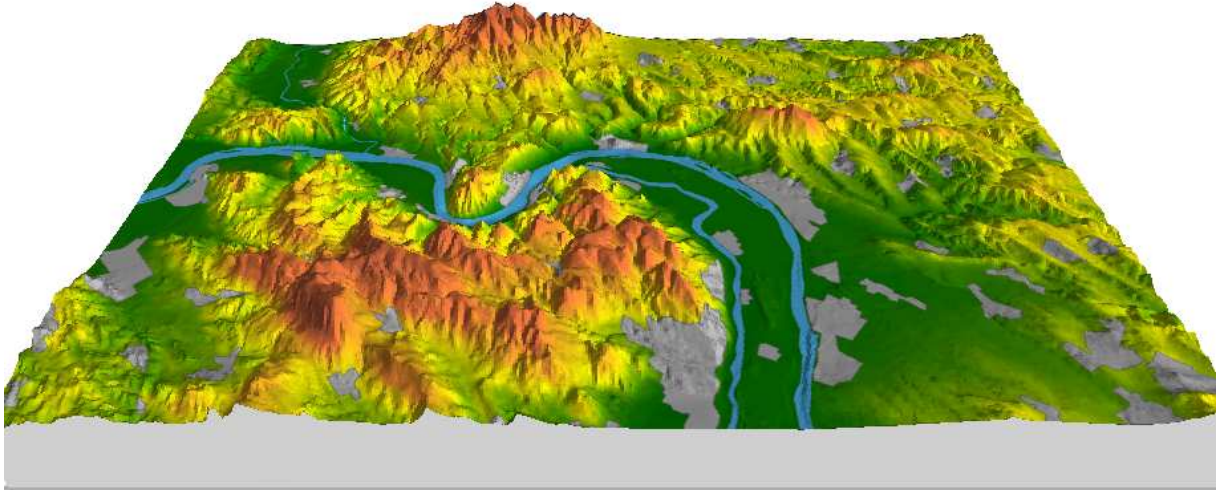
1.4. Sűrű és ritka domborzati rácsok

Tekintsük meg a 1.7. ábrát, amin egy sűrűn mintavételezett magassági modellt láthatunk perspektivikusan ábrázolva. A 1.8. ábrán az előbbi terület rétegszínezéses térképét láthatjuk.

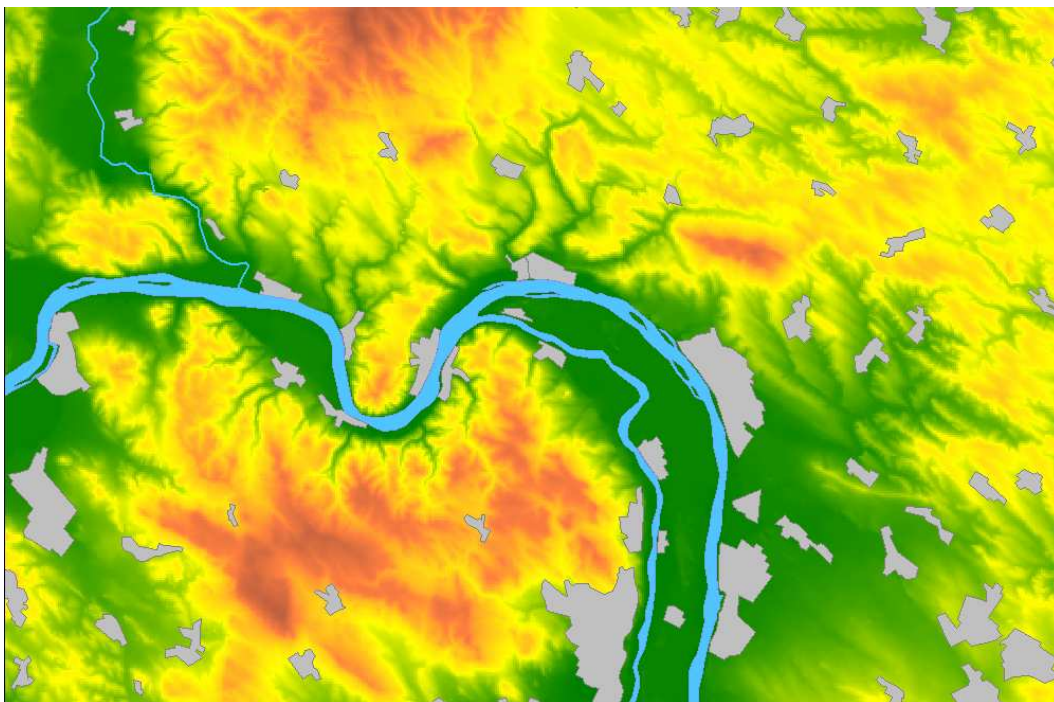
Hajtsunk végre erőteljes adatrítást a szabályos rácsban rendelkezésre álló magassági adatbázison. Növeljük például 10 szeresére a mintavételi távolságot. A mintavételi tételből tudjuk, hogy ezáltal el fogjuk veszíteni a jel spektrumából az $1/2\tau$ -nál nagyobb frekvenciákat, vagyis simító szűrést hajtsunk végre az adatrendszeren, ezáltal el fognak tűnni a domborzatból a gyors változások, kisebb kiterjedésű egyenetlenségek. Amikor hagyományos módon generalizál a térképész, pontosan ilyen műveletet hajt végre.

A 1.9. ábra a ritkított adatrendszerből számított magassági modellt mutatja perspektivikusan, míg az 1.10. ábra ugyanezt rétegszínezéssel ábrázolva.

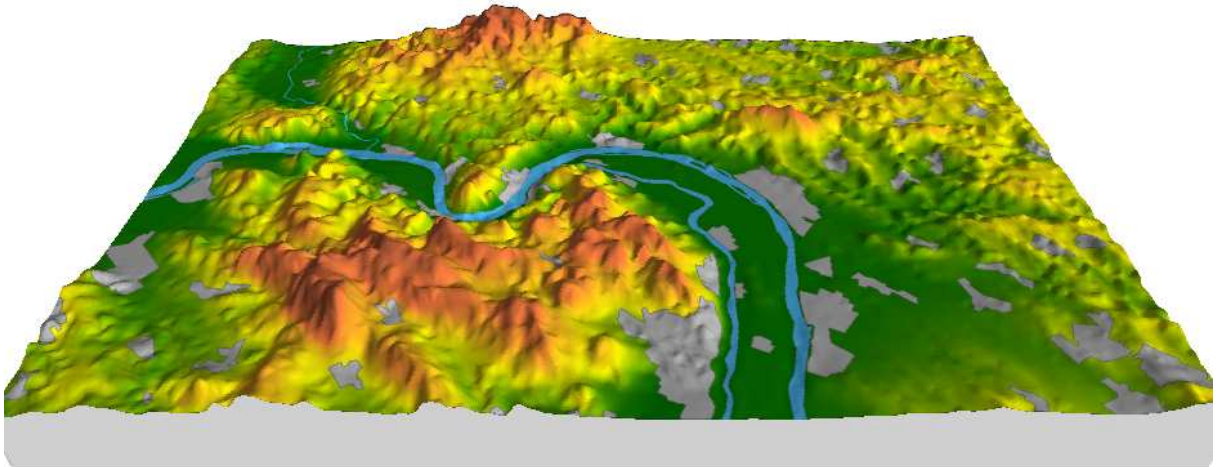
A ritkítás által egy olyan eljárás juthatunk, amely a generalizálást nem szubjektív ismervek alapján végzi el, hanem a fizikai felfogásunkhoz legközelebb álló, automatikus módon, tehát mindig ugyanúgy, reprodukálhatóan. Az ismert eljárásra írt programok egyelőre kísérleti jellegűek. Ahhoz, hogy technológiált módon működjenek, még számos szoftverkonstrukciós részletkérdést kell megoldani, amik azonban nem érintik a módszer lényegét. A magassági modelleket Intergraph Geomediával készítettük, az alapul szolgáló magassági adatbázist a HM Térképészeti kht készítette.



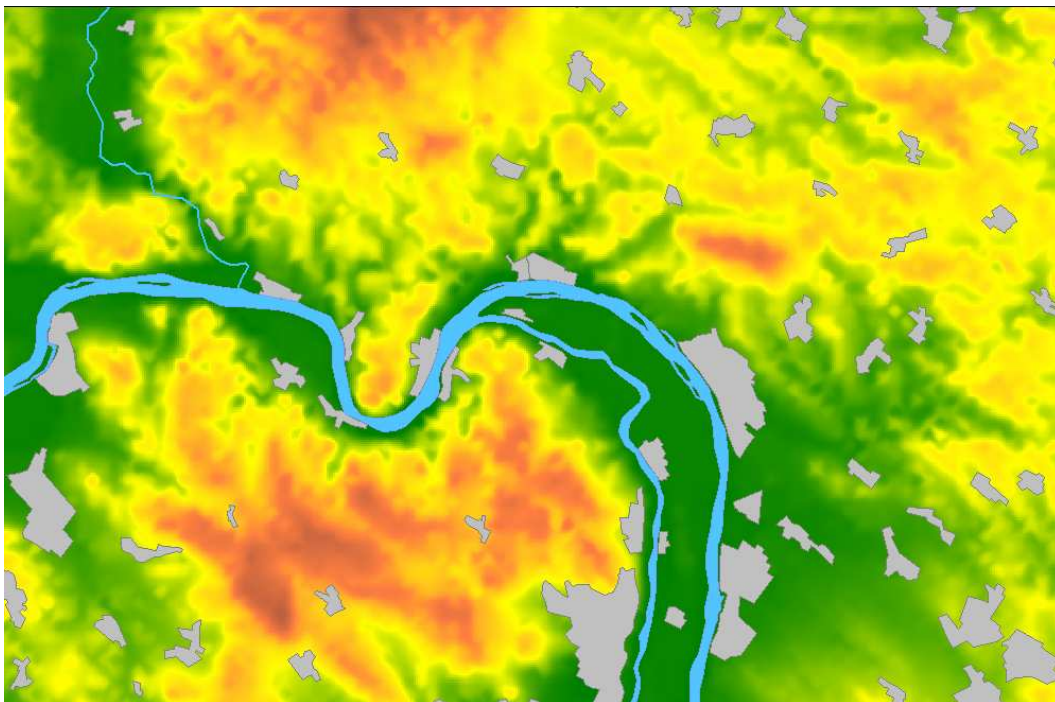
1.7. ábra. Egy 50m-es rácsállandójú adatbázisból számított magassági modell.



1.8. ábra. Egy 50m-es rácsállandójú adatbázisból számított rétegszínezéses magasság ábrázolás.



1.9. ábra. Egy 500m-es rácsállandójú adatbázisból számított magassági modell.



1.10. ábra. Egy 500m-es rácsállandójú adatbázisból számított rétegszínezéses magasság ábrázolás.

Irodalomjegyzék

- [1] M. Bellanger: "Digital Processing of Signals, Theory and Practice", John Wiley and Sons, 1986
- [2] S. Smith: "Digital Signal Processing", Elsevier Science, 2003
- [3] R.Longley-M.Goodchild-D.Maguire-D.Rhind:"Geographic Information, Systems and Sciense", Wiley, 2002
- [4] Meskó A.: "A digitális szeizmikus feldolgozás alapjai", Tankönyvkiadó, Budapest, 1975
- [5] Meskó A.: "Geofizikai adatfeldolgozás I., lineáris átalakítások", Tankönyvkiadó, Budapest, 1983
- [6] J. F. Richards: "Remote sensing Digital image analysis", Springer-Verlag, 1986, Australia
- [7] J. Duncan: "Bevezetés a komplex függvénytanba", Műszaki könyvkiadó, Budapest, 1974
- [8] R. Cristescu - G. Marinescu: "Bevezetés a disztribúció elméletbe", Műszaki könyvkiadó, Budapest, 1969